Aufgabe 7

Teilaufgabe 1

$n = 2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathbf{1}_2 - A_2) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + p & -p \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1 + p)\lambda - (-1)(-p) = \lambda^2 - \lambda(1-p) - p$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -p \end{aligned}$$

$n = 3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathbf{1}_3 - A_3) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + p & -p & 0 \\ -1 + p & \lambda & -p \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1 + p)\lambda^2 + (-p)^2(-1) - \lambda(-1+p)(-p) = \lambda^3 - (1-p)\lambda^2 - p(1-p)\lambda - p^2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -p\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ \lambda_3 &= -p\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{aligned}$$

$n = 4$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathbf{1}_4 - A_4) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + p & -p & 0 & 0 \\ -1 + p & \lambda & -p & 0 \\ -1 + p & 0 & \lambda & -p \\ -1 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1 - p)\det \begin{pmatrix} \lambda & -p & 0 \\ 0 & \lambda & -p \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - (-p)\det \begin{pmatrix} -1 + p & -p & 0 \\ -1 + p & \lambda & -p \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 1 + p)\lambda^3 + p\left[(-1+p)\lambda^2 + (-p)^2(-1) - \lambda(-1+p)(-p)\right] = \lambda^4 + (-1+p)\lambda^3 + p(-1+p)\lambda^2 + p^2(1-p)\lambda - p^2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -p \\ \lambda_3 &= pi \\ \lambda_4 &= -pi \end{aligned}$$

Teilaufgabe 2

$$A_k = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & \cdots & p \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Induktionsanfang: $k = 2$

$$\chi_{2,p} = (\lambda - 1)\frac{\lambda^2 - p^2}{\lambda - p} = (\lambda - 1)\frac{(\lambda + p)(\lambda - p)}{\lambda - p} = (\lambda - 1)(\lambda + p)$$

Stimmt, vgl. Teilaufgabe 1.

Induktionsbehauptung:

$$\chi_{k-1,p} = (\lambda - 1)\frac{\lambda^{k-1} - p^{k-1}}{\lambda - p}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\chi_{k,p} = \det(\lambda \mathbf{1}_k - A_k) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + p & -p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 + p & \lambda & -p & 0 & & 0 \\ -1 + p & 0 & \lambda & -p & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ -1 + p & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \\
&\quad \textit{Addiere zweite auf die erste Spalte} \\
&= \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda - 1 + p & \lambda & -p & 0 & & 0 \\ -1 + p & 0 & \lambda & -p & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ -1 + p & 0 & 0 & 0 & \cdots & -p \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \\
&\quad \textit{Nach der 1. Zeile entwickeln} \\
&= (\lambda - 1)\lambda^{k-1} - (-p)\chi_{k-1,p} \\
&\quad \textit{Induktionsannahme einsetzen} \\
&= (\lambda - 1)\lambda^{k-1} + p\left[(\lambda - 1)\frac{\lambda^{k-1} - p^{k-1}}{\lambda - p}\right] \\
&= (\lambda - 1)\left[\frac{\lambda^k - p\lambda^{k-1}}{\lambda - p} + \frac{p\lambda^{k-1} - p^k}{\lambda - p}\right] \\
&= (\lambda - 1)\frac{\lambda^k - p^k}{\lambda - p}
\end{aligned}$$