Aufgabe 8

Teilaufgabe 1

$$x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}, \quad x_0 = 1, x_1 = 3$$

Charakteristisches Polynom:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda - 2 &= 0 \\ \lambda_0 &= 2 \\ \lambda_1 &= -1 \end{aligned}$$

Umformen der Rekursion zu:

$$x_n = \alpha_0 \lambda_0^n + \alpha_1 \lambda_1^n$$

Löse dazu:

$$\begin{aligned} [\alpha_0, \alpha_1] \begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_0^1 \\ \lambda_1^0 & \lambda_1^1 \end{bmatrix} &= [x_0, x_1] \\ [\alpha_0, \alpha_1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} &= [1, 3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 &= 1 \\ 2\alpha_0 - \alpha_1 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{4}{3} \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$x_n = \alpha_0 \lambda_0^n + \alpha_1 \lambda_1^n = \frac{4}{3} 2^n - \frac{1}{3} (-1)^n$$

Asymptotisches Verhalten: Da $|\lambda_1| \leqq 1$ ist $\lambda_0 = 2$ der dominante Eigenwert. Die Folge verhält sich entsprechend wie eine Zweierpotenz:

$$x_n \in O\left(2^n\right)$$

Teilaufgabe 2

$$x_n = -2x_{n-1} + 15x_{n-2}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 15$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda - 15 &= 0 \\ \lambda_0 &= -5 \\ \lambda_1 &= 3 \end{aligned}$$

Umformen der Rekursion:

$$\begin{aligned}
[\alpha_0, \alpha_1] \begin{bmatrix} \lambda_0^0 & \lambda_0^1 \\ \lambda_1^0 & \lambda_1^1 \end{bmatrix} &= [x_0, x_1] \\
[\alpha_0, \alpha_1] \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} &= [x_0, x_1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1 &= x_0 \\
-5\alpha_0 + 3\alpha_1 &= x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{3}{8}x_0 - \frac{1}{8}x_1 \\
\alpha_1 &= \frac{5}{8}x_0 + \frac{1}{8}x_1
\end{aligned}$$

Einsetzen:

$$x_n = \alpha_0\lambda_0^n + \alpha_1\lambda_1^n = \left(\frac{3}{8}x_0 - \frac{1}{8}x_1\right)(-5)^n - \left(\frac{5}{8}x_0 + \frac{1}{8}x_1\right)3^n$$

Asymptotisches Verhalten: Wenn $\alpha_0 \neq 0$, dann verhält sich x_n wie $(-5)^n$. Wenn $\alpha_0 = 0$ gilt, folgt daraus $x_1 = 3x_0$. Sind in diesem Fall x_0 und x_1 positiv, so strebt x_n nach $-\infty$; sind x_0 und x_1 negativ, strebt x_n nach ∞.

Teilaufgabe 3

$$x_n = 3x_{n-1} - 3x_{n-2} + x_{n-3}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned}
\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 &= 0 \\
\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 &= 1
\end{aligned}$$

$\lambda_0 = 1$ ist eine dreifache Nullstelle, daher sind die drei linear-unabhängigen Folgen

$$\begin{aligned}
\lambda^{(0)} &= (1 \cdot \lambda^n)_{n \geqq 0} = \left(\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots\right) = (1, 1, 1, 1, \ldots) \\
\lambda^{(1)} &= (n \cdot \lambda^n)_{n \geqq 0} = \left(0\lambda^0, 1\lambda^1, 2\lambda^2, \ldots\right) = (0, 1, 2, 3, \ldots) \\
\lambda^{(2)} &= (n^2 \cdot \lambda^n)_{n \geqq 0} = \left(0\lambda^0, 1\lambda^1, 4\lambda^2, \ldots\right) = (0, 1, 4, 9, \ldots)
\end{aligned}$$

Basen des Vektorraums ν. Siehe Absatz 3.9 *Mehrfache Nullstellen* im Skript.
Es gibt ein Polynom zweiten Grades, $p(x)$, für das gilt:

$$\begin{aligned}
x_n &= p(n)\lambda^n \\
\text{mit} \quad p(0)\lambda^0 &= 0 \\
p(3)\lambda^3 &= 3 \\
p(5)\lambda^5 &= 10 \\
p(n)\lambda^n = \left(\alpha_0 n^0 + \alpha_1 n^1 + \alpha_2 n^2\right)\lambda^n &= \underline{\alpha_0 n^0 \lambda^n} + \alpha_1 n^1 \lambda^n + \alpha_2 n^2 \lambda^n = x_n
\end{aligned}$$

Da $\lambda = 1$ und $p(n)$ ein Polynom zweiten Grades ist folgt, dass sich *jede* Folge $(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (p(0), p(1), p(2), \ldots)$ mithilfe der obigen Rekursionsgleichung darstellen lässt. Insbesondere gilt das natürlich für die Folgen $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ des Übungsblatts.

Lösung mit $n = \{0, 3, 5\}, y_0 = 0, y_3 = 3, y_5 = 10$:

$$\begin{aligned}
[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 0^0\lambda^0 & 3^0\lambda^3 & 5^0\lambda^5 \\ 0^1\lambda^0 & 3^1\lambda^3 & 5^1\lambda^5 \\ 0^2\lambda^0 & 3^2\lambda^3 & 5^2\lambda^5 \end{bmatrix} &= [y_0, y_3, y_5] \\
[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 25 \end{bmatrix} &= [0, 3, 10]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 0 \\
\alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 &= 3 \\
\alpha_0 + 5\alpha_1 + 25\alpha_2 &= 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 0 \\
\alpha_1 &= -\frac{1}{2} \\
\alpha_2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(n) &= \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n^1 + \alpha_0 n^0 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \\
y_n &= p(n)\lambda^n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n
\end{aligned}$$

Da man weiß, dass y_0, y_3 und y_5 die Werte eines Polynoms zweiten Grades für $n = \{0, 3, 5\}$ sein müssen, kann man die Lösung natürlich viel kürzer ermitteln. Das gezeigte Vorgehen funktioniert so aber für beliebige C-rekursive Folgen mit mehrfachen Nullstellen.

Teilaufgabe 4

A, B stochastische $k \times k$-Matrizen. $\Rightarrow$ Zeilensummen sind Eins:

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_{ij} = 1 \quad \forall i = 0 \ldots k-1$$

Analog für B. Bei der Matrix-Multiplikation ergeben sich die Zellen von $C = AB$ zu:

$$c_{ij} = \sum_{m=0}^{k-1} a_{im} b_{mj}$$

Die Zeilensummen von C sind also:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k-1} c_{in} &= \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} a_{im} b_{mn} \\
&= \sum_{\mathbf{m}=0}^{k-1} \sum_{\mathbf{n}=0}^{k-1} a_{im} b_{mn} \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} a_{im} \cdot \left(\sum_{n=0}^{k-1} b_{mn} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{k-1} a_{im} \cdot 1 \\
&= 1 \quad \Rightarrow C \text{ ist stochastische Matrix}
\end{aligned}$$

Teilaufgabe 6

Stochastischen Matrizen haben den dominierenden Eigenwert $\lambda = 1$ mit dem rechten Eigenvektor $y = \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$, siehe Abschnitt 4.4 im Skript.

Da A eine doppelt stochastische Matrix ist, gilt das Selbe für die transponierte Matrix A^T:

$$\begin{aligned} A^T \mathbf{1}^T &= \mathbf{1}^T \\ (\mathbf{1}A)^T &= \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1}A &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

$\mathbf{1}$ ist also auch ein *linker* Eigenvektor von A
$\Rightarrow$ für $n \to \infty$ sind alle Zeilen von A^n und alle Spalten von A^n identisch.
$\Rightarrow$ alle Elemente in A^n sind identisch:

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \left[a_{ij} = \frac{1}{k} \right]_{0 \leqq i,j < k}$$

Teilaufgabe 7

$$\begin{aligned} [\alpha_0, \alpha_1] \begin{bmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} &= [x_2, x_3] \\ \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 &= x_2 \\ \alpha_0 x_1 + \alpha_1 x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\alpha_0, \alpha_1] \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 29 \end{bmatrix} &= [29, -23] \\ \alpha_0 5 + \alpha_1 1 &= 29 \\ \alpha_0 1 + \alpha_1 29 &= -23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 6 \\ \alpha_1 &= -1 \end{aligned}$$

Die Rekursionsgleichung der Folge ist also:

$$x_n = -x_{n-1} + 6x_{n-2}$$

Das charakteristische Polynom mit seinen Nullstellen ist:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda - 6 \\ \lambda_0 &= -3 \\ \lambda_1 &= 2 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$x_n = \alpha_0 \lambda_0^n + \alpha_1 \lambda_1^n = \alpha_0 (-3)^n + \alpha_1 2^n$$

Da $1{,}8 = \alpha_0 \neq 0$ folgt das asymptotische Verhalten entsprechend $(-3)^n$. α_1 ist übrigens 3,2, was aus dem Rekursionsbeginn ($\alpha_0 + \alpha_1 = 5$) direkt folgt.

Folgeglieder:

n	x_n
4	197
5	-335
6	1517
7	-3527
8	12629
9	-33791
10	109565