Aufgabe 11

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} + f_n \quad (n \geqq 2)$$

Teilaufgabe 1

$$\begin{aligned} x_n &= 4x_{n-1} - 4x_{n-2} \quad (n \geqq 2) \\ \chi(\lambda) &= \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \\ \lambda_{1,2} &= 2 \end{aligned}$$

Doppelte Nullstelle, das heißt es gibt eine Darstellung mit einem *Polynom 1. Grades*, vgl. Abschnitt 3.9 im Skript:

$$\begin{aligned} \exists p(n): \quad x_n &= p(n)\lambda^n \\ p(n) &= \mu_1 n + \mu_2 \\ \Rightarrow \quad x_n &= \mu_1 n 2^n + \mu_2 2^n \end{aligned}$$

Je nachdem welche Werte μ_0 und μ_1 haben verhält sich x_n also wie $\pm n2^n$ oder $\pm 2^n$. Wenn $\mu_0 = \mu_1 = 0$ gilt $\forall n : x_n = 0$.

Teilaufgabe 2

$\mathbf{f} = (1, 1, 1, 1, \ldots)$

Für f_n gilt also: $f_n = f_{n-1}$.

$$\begin{array}{rcccccccc} x_n & = & 4x_{n-1} & - & 4x_{n-2} & & & + & f_n \\ x_{n-1} & = & & & 4x_{n-2} & - & 4x_{n-3} & + & f_{n-1} \\ \\ x_n - x_{n-1} & = & 4x_{n-1} & - & 8x_{n-2} & + & 4x_{n-3} & & \\ x_n & = & 5x_{n-1} & - & 8x_{n-2} & + & 4x_{n-3} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \\ \lambda_{1,2} &= 2 \\ \lambda_3 &= 1 \\ \Rightarrow \quad x_n &= p(n)\lambda_{1,2}^n + \mu_3 \lambda_3^n \\ &= \mu_1 n 2^n + \mu_2 2^n + \mu_3 1^n \end{aligned}$$

Asymptotisches Verhalten wie bei Teilaufgabe 1, nur mit $\mu_0 = \mu_1 = 0$ gilt stattdessen $\forall n : x_n = \mu_3$.

$\mathbf{f} = (1, 2, 4, 8, \ldots)$

Für f_n gilt also: $f_n = 2f_{n-1}$.

$$\begin{array}{rcccccccc} x_n & = & 4x_{n-1} & - & 4x_{n-2} & & & + & f_n \\ x_{n-1} & = & & & 4x_{n-2} & - & 4x_{n-3} & + & f_{n-1} \\ 2x_{n-1} & = & & & 8x_{n-2} & - & 8x_{n-3} & + & f_{\mathbf{n}} \\ \\ x_n - 2x_{n-1} & = & 4x_{n-1} & - & 12x_{n-2} & + & 8x_{n-3} & & \\ x_n & = & 6x_{n-1} & - & 12x_{n-2} & + & 8x_{n-3} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \\ &= (\lambda - 2)^3 \\ \lambda_{1,2,3} &= 2 \\ \Rightarrow \quad x_n &= p(n)\lambda_{1,2,3}^n \\ &= \mu_1 n^2 2^n + \mu_2 n 2^n + \mu_3 2^n \end{aligned}$$

Asymptotisches Verhalten entsprechend wie $n^2 2^n$, $n2^n$, 2^n oder konstant Null, abhängig von $\mu_{1,2,3}$.

$\mathbf{f} = (1, 3, 9, 27, \dots)$

Für f_n gilt also: $f_n = 3f_{n-1}$.

$$\begin{array}{rcccccccc} x_n & = & 4x_{n-1} & - & 4x_{n-2} & & & + & f_n \\ x_{n-1} & = & & & 4x_{n-2} & - & 4x_{n-3} & + & f_{n-1} \\ 3x_{n-1} & = & & & 12x_{n-2} & - & 12x_{n-3} & + & f_{\mathbf{n}} \\ & & & & & & & & \\ x_n - 3x_{n-1} & = & 4x_{n-1} & - & 16x_{n-2} & + & 12x_{n-3} & & \\ x_n & = & 7x_{n-1} & - & 12x_{n-2} & + & 8x_{n-3} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \chi(\lambda) & = & \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 \\ & = & (\lambda - 2)^3 \\ \lambda_1 & = & 3 \\ \lambda_{2,3} & = & 2 \\ \Rightarrow \quad x_n & = & \mu_1 \lambda_1^n + p(n)\lambda_{2,3}^n \\ & = & \mu_1 3^n + \mu_2 n 2^n + \mu_3 2^n \end{array}$$

Asymptotisches Verhalten entsprechend wie 3^n, $n2^n$, 2^n oder konstant Null, abhängig von $\mu_{1,2,3}$.

Wiederholung: Berechnung der Koeffizienten bei mehrfachen Nullstellen

Angenommen den Fall $f_n = 2f_{n-1}$ (siehe oben): $\lambda_{1,2,3} = 2$. Als Startwerten nehmen wir $x_0 = 2$, $x_1 = 6$, $x_2 = 16$ an. Die Koeffizienten können mit folgendem Gleichungssystem berechnet werden:

$$\begin{bmatrix} \mu_3 & \mu_2 & \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^0\lambda^0 & 1^0\lambda^1 & 2^0\lambda^2 \\ 0^1\lambda^0 & 1^1\lambda^1 & 2^1\lambda^2 \\ 0^2\lambda^0 & 1^2\lambda^1 & 2^2\lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

Bemerkung: Die Reihenfolge der $\mu_{1,2,3}$ entspricht der Verwendung in der Teilaufgabe 2.
Erinnerung: 0^0 soll hier nur die Regelmäßigkeit aufzeigen. Der entsprechende Faktor muss 1 sein.

$$\begin{bmatrix} \mu_3 & \mu_2 & \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 16 & 16 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 16 & 8 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_3 & = & 2 \\ \mu_2 & = & 1 \\ \mu_1 & = & 0 \end{array} \right.$$

Die Folge lässt sich also schreiben als:

$$x_n = 0 \cdot n^2 2^n + 1 \cdot n2^n + 2 \cdot 2^n = n2^n + 2^{n+1} = O\left(n2^n\right)$$