Rolf Wanka
Sabine Helwig, Florian Forster

Erlangen, 6. Juni 2008

Übungen zur Vorlesung

Approximationsalgorithmen

SS 2008

Blatt 8

AUFGABE 25:

(a) Zeigen Sie: Sei Φ eine Boolesche (n,m)-Formel in KNF. Dann ist

$$\max\{\mathsf{wahr}((\text{FALSE},\ldots,\text{FALSE}),\Phi),\mathsf{wahr}((\text{TRUE},\ldots,\text{TRUE}),\Phi)\} \geq \frac{1}{2}\cdot m \ .$$

(b) Geben Sie eine Boolesche (n,m)-Formel an, so daß Gleichheit gilt.

AUFGABE 26:

Für das Problem MAX-SAT wurde zur Eingabe $\Phi = \Phi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ mit m Klauseln in der Vorlesung der Algorithmus A betrachtet:

ALGORITHMUS A

for $i := 1$ **to** n **do**
$\begin{cases} \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2}\text{: } x_i := \text{TRUE} ; \\ \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2}\text{: } x_i := \text{FALSE} ; \end{cases}$
gib $b_A = (x_1,\ldots,x_n)$ aus.

Für A wurde der Erwartungswert $E[A(\Phi)]$ für die Anzahl der erfüllten Klauseln berechnet. Natürlich kann dieser Algorithmus, wenn er mit Φ gestartet wird, auch *weniger* als $E[A(\Phi)]$ Klauseln erfüllen. Betrachten Sie nun den folgenden Algorithmus:

ALGORITHMUS A_{besser}

berechne $\ell := E[A(\Phi)]$; $T := 0$;
repeat $T := T+1$;
for $i := 1$ **to** n **do**
$\begin{cases} \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2}\text{: } x_i := \text{TRUE} ; \\ \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2}\text{: } x_i := \text{FALSE} ; \end{cases}$
$b := (x_1,\ldots,x_n)$
until $\mathsf{wahr}(b,\Phi) \geq \ell$;
gib b aus.

A_{besser} erfüllt also *immer* mindestens $E[A(\Phi)]$ Klauseln. T ist eine Zählvariable, die angibt, wie oft die **repeat**-Schleife durchlaufen wurde.

(a) Sei $p = \Pr[A(\Phi)] \geq \ell]$. Zeigen Sie: $p \geq \dfrac{1}{m+1-\ell}$

Benutzen Sie, daß $E[X] = \sum_{i=0}^{k-1} i\cdot \Pr[X=i] + \sum_{i=k}^{\infty} i\cdot\Pr[X=i]$ für natürlichzahlige Zufallsvariablen ist.

(b) Berechnen Sie nun $E[T]$. Was kommt heraus, wenn alle Klauseln die Länge genau k haben?

AUFGABE 27:

Bereits in Aufgabe 12 auf Blatt 4 haben wir das Knotenüberdeckungsproblem vorgestellt:

Eine *Knotenüberdeckung* (engl.: *vertex cover*) ist eine Knotenmenge $C \subseteq V$, so daß für jede Kante $\{u,v\} \in E$ gilt: $\{u,v\} \cap C \neq \emptyset$. Beim Knotenüberdeckungsproblem VC soll eine kleinste Knotenüberdeckung bestimmt werden.

(a) Erläutern Sie, warum das folgende ganzzahlige lineare Programm (*Integer Linear Programme*, ILP) eine exakte Lösung von VC berechnet.

GANZZAHLIGES LINEARES PROGRAMM FÜR VC:

$$\begin{array}{rll} \text{minimiere} & \sum_{i=1}^{n} x_i & \\ \text{gemäß} & x_i + x_j \geq 1 & \forall \{u_i,u_j\} \in E \\ & x_i \in \{0,1\} & \forall u_i \in V \end{array}$$

(b) Ersetzen Sie die Nebenbedingungen „$x_i \in \{0,1\}$“ durch die weicheren Nebenbedingungen „$0 \leq x_i \leq 1$“. Man sagt auch, daß das Programm *relaxiert* wurde. Nehmen Sie nun an, daß das relaxierte LP gelöst worden ist (das geht in Polynomialzeit!).

Zeigen Sie, daß deterministisches Runden der (gebrochen-rationalen) optimalen Lösung des relaxierten Programms, d. h. die Entscheidung „falls $x_i \geq \frac{1}{2}$, dann lege Knoten u_i in C“, eine Approximation von VC der relativen Güte 2 garantiert. Zuerst muß dazu gezeigt werden, daß durch diese Rundungsvorschrift überhaupt eine Knotenüberdeckung gewonnen wird.

(c) Betrachten Sie den vollständigen Graphen auf n Knoten, also den K_n, als Eingabe von VC. Wie groß kann die Abweichung zwischen der optimalen Lösung zu dieser Eingabe und einer optimalen Lösung des zugehörigen relaxierten Programms sein?