Approximate Counting

Ein FPRASC für #RUCKSACK

Florian Forster
http://verplant.org/

Friedrich Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

Sommerschule Randomisierte Algorithmen, 2007-09-18

Gliederung

Warum Zählprobleme?

- Physikalische Eigenschaften können durch Graph-Probleme modelliert werden
- Die Eigenschaften eines Stoffes hängen dabei von der **Anzahl** der möglichen Lösungen ab

Zählprobleme

- $\#\Pi$ ist kombinatorisches Zählproblem zu dem Optimierungsproblem Π
- $S(I)$ ist die Menge der Lösungen für Π
- Anzahl $\#(I) = |S(I)|$ ist Lösung von $\#\Pi$

Die Komplexitätsklasse $\#P$

- In $\#P$ sind die Zählprobleme mit polynomzeit beschränktem Algorithmus, der die Zertifikate überprüfen kann
- $\Pi \in NP \Rightarrow \#\Pi \in \#P$
- Der Begriff der „Vollständigkeit“ kann in Polynomzeit reduziert werden

Einige $\#P$-Vollständige Probleme

$\#DNF$	Anzahl der erfüllenden Lösungen für eine Boolesche-Formel in DNF
$\#COL_k$	Anzahl der Graphfärbungen mit k Farben
$\#RUCKSACK$	Anzahl der gültigen Rucksack-Füllungen $\rightarrow$ Dazu gleich mehr

Die Monte-Carlo-Methode

- $S(I)$ wird zu einem Universum U erweitert, dessen Größe $|U|$ bekannt ist
- Der Faktor der Erweiterung $\xi = \frac{|U|}{\#(I)}$ heißt Expansion
- Ein gleichverteilter Generator zieht Elemente aus U
- Aus dem Anteil der gezogenen Elemente die in $S(I)$ liegen und $|U|$ kann $\#(I)$ abgeschätzt werden

Definition von #RUCKSACK

- Eine Instanz I von #RUCKSACK ist charakterisiert durch die Rucksackgröße B, die Elemente $W = \{w_1, w_2, \dots, w_{\max}\}$ und die Volumenfunktion $\mathrm{vol} : W \to \mathbb{N}$. Der Wert der Elemente ist in der Zählvariante des Problems unerheblich
- Es gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} B &\geq \max\{\mathrm{vol}(w) | w \in W\} \\ B &< \sum_{w \in W} \mathrm{vol}(w) \end{aligned}$$

Ein exakter, pseudopolynomieller Algorithmus für #RUCKSACK

- Die Anzahl der gültigen Lösungen für einen Rucksack der Größe β mit den Elementen $w_1 \dots w_j$, $F_{I'}(j, \beta)$, kann rekursiv berechnet werden:

$$F_I(j, \beta) = \begin{cases} 0 & \beta < 0 \\ 1 & \beta \geq 0, j = 0 \\ F_I(j-1, \beta) + F_I(j-1, \beta - \mathrm{vol}(w_j)) & \beta \geq 0, j \geq 1 \end{cases}$$

- Für einen Rucksack mit der Größe B und $|W|$ Elementen hat der Algorithmus eine Laufzeit von $O(B \cdot |W|)$
- Sei $v_{\max} = \max\{\mathrm{vol}(w) | w \in W\}$
- Es gilt:

$$\begin{aligned} |W| &\leq v_{\max} \\ B &< |W| \cdot v_{\max} \leq v_{\max}^2 \end{aligned}$$

- Die Laufzeit kann also auch als $O(v_{\max}^3)$ angegeben werden
- Beachte jedoch, dass $v_{\max} = 2^{O(n)}$

Expansion

- Zu einer gegebenen Instanz I generieren wir nun eine „kleine“ Instanz I':

$$\begin{aligned} W' &= W = \{w_1, w_2, \dots, w_{\max}\} \\ \mathrm{vol}'(w) &= \left\lfloor \frac{|W|^2}{B} \cdot \mathrm{vol}(w) \right\rfloor \\ B' &= |W|^2 \end{aligned}$$

- Die Größe des größten Elements ist jetzt beschränkt durch:

$$v'_{\max} \leq B' = |W|^2$$

- Das heißt $\#(I') = F_{I'}(|W|, |W|^2)$ kann in Zeit $O\left(|W|^3\right)$ berechnet werden
- Das ist echt besser als $O(v_{\max}^3)$, da $|W| = O(n)$

- Sei A eine Lösungen für I, also $A \in S(I)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}'(A) &= \sum_{w \in A} \left\lfloor \frac{|W|^2}{B} \cdot \mathrm{vol}(w) \right\rfloor \\ &\le \frac{|W|^2}{B} \cdot \sum_{w \in A} \mathrm{vol}(w) \\ &\le \frac{|W|^2}{B} \cdot B = |W|^2\end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ ist also auch eine Lösung für I'
$\Rightarrow S(I) \subseteq S(I')$

Größe der Expansion

- Sei $A \in S(I') \setminus S(I)$
- A muss ein Element w^* mit $\mathrm{vol}(w^*) \ge \frac{B}{|W|}$ enthalten
- Ohne dieses Element gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(A \setminus w^*) &\le \tfrac{B}{|W|^2} \cdot (\mathrm{vol}'(A \setminus w^*) + |A \setminus w^*|) \\ &= \tfrac{B}{|W|^2} \cdot (\mathrm{vol}'(A) - \mathrm{vol}'(w^*) + |A| - 1) \\ &\le \tfrac{B}{|W|^2} \cdot \left(|W|^2 - |W| + |W| - 1\right) \\ &\le B\end{aligned}$$

- Da zu jeder Lösung $A \in S(I)$ „nur“ maximal $|W|$ Lösungen $A' \in S(I') \setminus S(I)$ angegeben werden können, gilt:

$$\begin{aligned} & |S(I') \setminus S(I)| &\le\ & |W| \cdot |S(I)| \\ & |S(I')| &\le\ & |W| \cdot |S(I)| + |S(I)| \\ & |S(I')| &\le\ & |S(I)| \cdot (|W| + 1) \\ \Rightarrow\ & \xi &\le\ & |W| + 1\end{aligned}$$

Zwischenergebnis

- Da $\xi \le |W| + 1$ haben wir also schon einen deterministischen Approximationsalgorithmus mit der relativen Güte:

$$A(I) = \frac{F_{I'}(|W|, |W|^2)}{\sqrt{|W| + 1}}$$

„Zutaten“ für die Monte-Carlo-Methode

- Wir haben $S(I)$ zu einem Universum $S(I')$ erweitert, das maximal um den Faktor ξ größer ist als $S(I)$ selbst
- Um die Monte-Carlo-Methode anwenden zu können brauchen wir jetzt noch einen Generator, der gleichverteilt Elemente aus $S(I')$ zieht

Ein uniformer Generator

- Ein Generator kann wie folgt angegeben werden:
for $j = |W|$ **downto** 1

$$\begin{cases} \dfrac{F_{I'}(j-1, \beta - \mathrm{vol}(w_j))}{F_{I'}(j, \beta)} & : \begin{array}{l} A_{i+1} = A_i \cup \{w_j\} \\ \beta_{i+1} = \beta_i - \mathrm{vol}(w_j) \end{array} \\ \dfrac{F_{I'}(j-1, \beta)}{F_{I'}(j, \beta)} & : \begin{array}{l} A_{i+1} = A_i \\ \beta_{i+1} = \beta_i \end{array} \end{cases}$$

- Sei $A \in S(I')$ beliebig aber fest
- Sei $p_i = \frac{z_i}{n_i}$ die Wahrscheinlichkeit, die zum tragen kommt wenn die Entscheidung für bzw. gegen das i-te Element gefällt wird

$$
\begin{aligned}
z_1 &= F_{I'}(0, \beta') = 1 \\
n_{|W|} &= F_{I'}\left(|W|, |W|^2\right) \\
z_i &= n_{i-1} \\
\Rightarrow P[A] &= \frac{z_{|W|}}{n_{|W|}} \cdot \frac{z_{|W|-1}}{n_{|W|-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{z_1}{n_1} \\
&= \frac{z_1}{n_{|W|}} = \frac{1}{F_{I'}\left(|W|, |W|^2\right)} = \frac{1}{\#(I')}
\end{aligned}
$$

Laufzeit

- Um mit Wahrscheinlichkeit $p \geq \frac{3}{4}$ einen Fehler kleiner als ϵ zu machen, sind

$$T_\xi(\epsilon) = \left\lceil \frac{4}{\epsilon^2} \cdot (\xi - 1) \right\rceil$$

Stichproben nötig (Estimator Theorem)

- Mit $\xi \leq |W| + 1$ und $|W| = O(n)$ ist die Gesamtlaufzeit

$$O\left(n^3 + \frac{n^2}{\epsilon^2}\right)$$

Zusammenfassung

- Generiere **Universum** $U = S(I') \supseteq S(I)$ durch ganzzahlige Multiplikation mit $\frac{|W|^2}{B}$
- **Expansion** $\xi = \frac{|S(I')|}{|S(I)|} \leq |W| + 1$
- Berechne $|S(I')| = F_{I'}\left(|W|^2, |W|\right)$ in $O\left(n^3\right)$
- Ziehe $T_\xi(\epsilon) = \left\lceil \frac{4|W|}{\epsilon^2} \right\rceil$ Stichproben in Zeit $O\left(\frac{n^2}{\epsilon^2}\right)$
- Laufzeit ist in $O\left(n^3 + \frac{n^2}{\epsilon^2}\right)$

Literatur

- Rolf Wanka, „Approximationsalgorithmen“, Seiten 151-182, 2006.
- Martin Dyer, „Approximate Counting by Dynamic Counting“, 2003.