

Das Rundreiseproblem und Stabilität von Approximationsalgorithmen

Florian Forster

Friedrich Alexander Universität Erlangen-Nürnberg

Seminar „Perlen der theoretischen Informatik“, 2008-01-19
<http://verplant.org/uni/perlen/>

Gliederung

Das Rundreiseproblem

Das Rundreiseproblem

Das Δ TSP

Approximationsalgorithmen für Δ TSP

Der 2APPR-Algorithmus

Der Christofides-Algorithmus

Stabilität von Approximationsalgorithmen

Definition

Abstandsfunktionen für Δ TSP

Stabilität von 2APPR und Christofides

Motivation

- ▶ Für viele „spezielle“ Probleme existieren gute Approximationsalgorithmen
- ▶ Ist es möglich diese Algorithmen auch für „normale“ Instanzen zu nutzen?
- ▶ Wie gut sind diese Lösungen?

Das Rundreiseproblem

Definition

Das Rundreiseproblem wird auch „Traveling Salesperson Problem“ (**TSP**) genannt.

- ▶ Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger, ungerichteter Graph mit Kantengewichten
- ▶ Gesucht ist die kürzeste (billigste) Rundreise, so dass jeder Knoten genau einmal besucht wird (Hamiltonkreis)

Das Rundreiseproblem

NP-Vollständigkeit

- ▶ TSP ist **stark** NP-vollständig
- ▶ Approximationsalgorithmen mit relativer Güte kann es nur geben, wenn $P = NP$
- ▶ Es gibt exakte Algorithmen mit Laufzeit $O(n^2 \cdot 2^n) \ll O(n!)$

Das Rundreiseproblem

Varianten

- ▶ Asymmetrisches TSP: Hin- und Rückweg haben nicht notwendigerweise die gleichen Kosten
- ▶ TSP mit Dreiecksungleichung (Δ **TSP**):
 $|a \rightarrow c| \leq |a \rightarrow b \rightarrow c|$
- ▶ euklidisches TSP: Knoten haben euklidische Abstände (beinhaltet Dreiecksungleichung)
- ▶ ...

Das Rundreiseproblem

Das Δ TSP

- ▶ Für alle Knoten gilt die Dreiecksungleichung
⇒ „Umwege sind teurer als direkt zu gehen“
- ▶ Problem immernoch NP-schwer
- ▶ Approximationsalgorithmen mit relativer Güte existieren:
2APPR mit Güte 2,
Christofides [2] mit Güte $\frac{3}{2}$
- ▶ Diese Algorithmen werden im Folgenden kurz vorgestellt

Approximationsalgorithmen für Δ TSP

Approximationsalgorithmen

- ▶ Approximationsalgorithmen für Optimierungsprobleme berechnen „möglichst gute“ Lösungen
- ▶ Die Abweichung vom Optimum ist nicht beliebig groß
- ▶ Laufzeit ist aber (verhältnismäßig) gering (also: polynomiell)

Approximationsalgorithmen für Δ TSP

Approximationsgüte

- ▶ Das Verhältnis von schlechtester approximierter zur optimalen Lösung heißt **Approximationsgüte**
- ▶ Zum Beispiel:
 - ▶ Optimale Lösung/Rundreise: 100
 - ▶ Approximierte Lösung/Rundreise: 150
 - ▶ \Rightarrow Güte mindestens 1,5

Approximationsalgorithmen für Δ TSP

2APPR

- ▶ Sei H ein minimaler Spannbaum von G
- ▶ Berechne eine Eulertour auf $H \uplus H$; überspringe doppelte Knoten
- ▶ Approximationsgüte 2 folgt aus der Minimalität des Spannbaums und der Dreiecksungleichung

Approximationsalgorithmen für Δ TSP

Beweis für die Güte von 2APPR

2APPR besitzt eine relative Güte von 2:

- ▶ Die Kosten des minimalen Spannbaum sind kleiner als die kosten der optimalen Rundreise R_{OPT} :

$$\text{cost}(H) \leq \left(1 - \frac{1}{|V|}\right) \cdot \text{cost}(R_{\text{OPT}})$$

- ▶ Durch das überspringen von Kanten wird die Strecke nicht länger (Dreiecksungleichung):

$$\text{cost}(A(x)) \leq 2 \cdot \text{cost}(H) \leq 2 \cdot \text{cost}(R_{\text{OPT}})$$

Approximationsalgorithmen für Δ TSP

Christofides

- ▶ Sei H ein minimaler Spannbaum von G
- ▶ Sei V_u die Menge aller Knoten in H mit ungeradem Grad
- ▶ Sei M ein leichtestes Matching aller Knoten in V_u
- ▶ Berechne eine Eulertour auf $H \cup M$; überspringe doppelte Knoten
- ▶ Approximationsgüte $\frac{3}{2}$ folgt aus der Minimalität des Spannbaums und des leichtesten Matchings sowie der Dreiecksungleichung

Approximationsalgorithmen für Δ TSP

Beweis für die Güte von Christofides

Christofides besitzt eine relative Güte von $\frac{3}{2}$:

- ▶ Die Kosten des minimalen Spannbaum sind kleiner als die kosten der optimalen Rundreise R_{OPT}
- ▶ Die Kosten des leichtesten Matchings sind kleiner als $\frac{1}{2} \cdot R_{\text{OPT}}$
- ▶ Durch das überspringen von Kanten wird die Strecke nicht länger (Dreiecksungleichung):

$$\text{cost}(A(x)) \leq \text{cost}(H) + \text{cost}(M) \leq \frac{3}{2} \cdot \text{cost}(R_{\text{OPT}})$$

Approximationsalgorithmen für Δ TSP

Wichtige Bemerkung

- ▶ Die Algorithmen selbst haben die Dreiecksungleichung **nicht** verwendet. Lediglich die Abschätzung der Approximationsgüte verwendet die Δ -Ungleichung!

Stabilität von Approximationsalgorithmen

Definition 1/2

- ▶ Definition nach [1]
- ▶ Sei L_ϕ eine Spezialisierung des (Optimierungs)Problems L
- ▶ Sei $A_\phi(x)$ ein Approximationsalgorithmus für L_ϕ mit relativer Güte δ_ϕ
- ▶ Sei $h_\phi(x)$ eine **Abstandsfunktion** für die gilt:
 - ▶ $h_\phi(x) = 0$ für $x \in L_\phi$
 - ▶ $h_\phi(x)$ effizient berechenbar
- ▶ Sei $L_{\phi,h,r}$ die Menge aller Probleminstanzen, deren Abstand (bezüglich h_ϕ) kleiner oder gleich r ist:

$$L_{\phi,h,r} = \{x \in L : h_\phi(x) \leq r\}$$

Stabilität von Approximationsalgorithmen

Definition 2/2

- ▶ $A_\phi(x)$ heißt **p-stabil bezüglich** h_ϕ , wenn für jedes $r, 0 \not\leq r \leq p$ ein $\delta_{\phi,r} \in \mathbb{R}^{>1}$ existiert, so dass $A_\phi(x)$ ein Approximationsalgorithmus für $L_{\phi,h,r}$ mit relativer Güte $\delta_{\phi,r}$ ist.
- ▶ $A_\phi(x)$ heißt **stabil bezüglich** h_ϕ , wenn $A_\phi(x)$ für **alle** $p \in \mathbb{R}^+$ p-stabil bezüglich h_ϕ ist.
- ▶ $A_\phi(x)$ heißt **instabil bezüglich** h_ϕ , wenn $A_\phi(x)$ für **kein** $p \in \mathbb{R}^+$ p-stabil bezüglich h_ϕ ist.
- ▶ $A_\phi(x)$ heißt **($r, f_r(n)$)-quasistabil bezüglich** h_ϕ , wenn $A_\phi(x)$ ein Approximationsalgorithmus für $L_{\phi,h,r}$ mit relativer Güte $f_r(n)$ ist.

Abstandsfunktionen für Δ TSP

Definition

- ▶ Funktion $\text{DIST}_{\text{three}} =$

$$\max \left\{ 0, \max \left\{ \frac{\text{cost}(u, v)}{\text{cost}(u, w) + \text{cost}(w, v)} - 1, u, v, w \in V \right\} \right\}$$

- ▶ Sei $W_{u,v} = \{w_1 = u, w_2, \dots, w_m = v\}$ ein einfacher Pfad von u nach v .

Funktion $\text{DIST}_{\text{path}} =$

$$\max \left\{ 0, \max \left\{ \frac{\text{cost}(u, v)}{\text{cost}(W_{u,v})} - 1, u, v \in V \right\} \right\}$$

Stabilität von 2APPR und Christofides

Stabilität bezüglich $\text{DIST}_{\text{path}}$

- ▶ 2APPR und Christofides sind **stabil bezüglich** $\text{DIST}_{\text{path}}$
- ▶ Die Kosten des berechneten Hamiltonkreises $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v_0$ sind maximal $(1 + r)$ mal die Kosten von $v_0 \rightarrow_p v_1 \rightarrow_p \dots \rightarrow_p v_n \rightarrow_p v_0$ wobei $u \rightarrow_p v$ der kürzeste **Pfad** von u nach v in G ist.
- ▶ 2APPR ist ein $(2(1 + r))$ -Approximationsalgorithmus für TSP
- ▶ Christofides ist ein $(\frac{3}{2}(1 + r))$ -Approximationsalgorithmus für TSP

Stabilität von 2APPR und Christofides

Stabilität bezüglich $\text{DIST}_{\text{three}}$

- ▶ Jeder Pfad p mit m Kanten in G kann durch eine einzige Kante e mit

$$\text{cost}(e) \leq (1+r)^{\lceil \log_2 m \rceil} \cdot \text{cost}(p)$$

ersetzt werden.

- ▶ 2APPR ist $\left(r, 2(1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil}\right)$ -quasistabil bezüglich $\text{DIST}_{\text{three}}$
- ▶ Christofides ist $\left(r, \frac{3}{2}(1+r)^{\lceil \log_2 n \rceil}\right)$ -quasistabil bezüglich $\text{DIST}_{\text{three}}$
- ▶ 2APPR und Christofides sind **instabil bezüglich $\text{Dist}_{\text{three}}$**

Der PMCA-Algorithmus

Ein stabiler Algorithmus bezüglich $\text{DIST}_{\text{three}}$

- ▶ In [1] wird der PMCA-Algorithmus vorgestellt
- ▶ Der Algorithmus ist stabil bezüglich $\text{DIST}_{\text{three}}$
- ▶ Erreicht wird das durch ein „Pfad-Matching“ und trickreiche „Abkürzungen“
- ▶ Die Approximationsgüte ist $\frac{3}{2}(1+r)^2$, die Laufzeit $O(n^3)$

Fazit 1/2

Das Rundreiseproblem

- ▶ Das allgemeine TSP kann man nicht gut approximieren
- ▶ Für das Δ TSP gibt es gute Approximationsalgorithmen
- ▶ Die Algorithmen verwenden die Dreiecksungleichung **nicht**, lediglich die Abschätzung braucht sie

Fazit 2/2

Stabilität von Approximationsalgorithmen

- ▶ 2APPR und Christofides sind stabil bezüglich $\text{DIST}_{\text{path}}$ aber instabil bezüglich $\text{DIST}_{\text{three}}$
- ▶ 2APPR und Christofides sind quasistabil bezüglich $\text{DIST}_{\text{three}}$
- ▶ Mit PMCA existiert ein Approximationsalgorithmus für Δ TSP der stabil bezüglich $\text{DIST}_{\text{three}}$ ist

Literatur



Hans-Joachim Böckenhauer, Juraj Hromkovic, Ralf Klasing, Sebastian Seibert, and Walter Unger.

Towards the notion of stability of approximation for hard optimization tasks and the traveling salesman problem.

In *CIAC '00: Proceedings of the 4th Italian Conference on Algorithms and Complexity*, pages 72–86, London, UK, 2000.

Springer-Verlag.



Nicos Christofides.

Worst-case analysis of a new heuristic for the travelling salesman problem.

In *Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results*, page 441. Academic Press, 1976.